УДК 519.2, 372.851

С. В. Мациевский, А. В. Гасников, А. А. Гарибьянц

ОБ ОДНОМ УЧЕБНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Представлена программа общего курса математического моделирования, связанная с моделированием транспортных потоков.

A program of the general course of mathematical modeling coordinated with modeling of transport flows is submitted.

Ключевые слова: математическое моделирование, транспортные потоки, учебная программа.

Key words: mathematical modeling, transport flows, training program.

1. Обоснование курса

В настоящее время все транспортные и социально-экономические последствия внедрения тех или иных мер на транспортной сети можно и нужно оценивать. Особую роль здесь играют прикладные (компьютерные) транспортные модели, которые, как правило, являются основным инструментальным средством городского транспортного планирования [1]. Важная составная часть учебной дисциплины по основам компьютерных транспортных моделей — общий курс математического моделирования. Представленная программа данного курса выступает одним из компонентов направления «Компьютерное моделирование транспортных потоков» [2]. Стержень курса математического моделирования — равновесные модели распределения потоков по сети.

С 50-х гг. XX в. вопросам поиска равновесий в транспортных сетях стали уделять большое внимание. В 1955 г. появилась первая модель равновесного распределения потоков по путям — BMW-модель, или модель Бэкмана [3]. В ней при заданных корреспонденциях (потоках из источников в стоки) решалась задача поиска равновесного распределения этих корреспонденций по путям на основе принципа Вардропа, то есть исходя из того, что каждый пользователь транспортной сети рационален и выбирает кратчайший маршрут следования. Таким образом, поиск равновесия в подобной модели сводился к поиску равновесия Нэша в популяционной игре [4] (популяций столько, сколько корреспонденций). Поскольку в модели предполагалось, что время прохождения ребра есть функция от величины потока только по этому ребру, то получившаяся игра была игрой загрузки, а следовательно, потенциальной. Последнее означает, что поиск равновесия сводится к

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта.
Сер.: Физико-математические и технические науки. 2016. № 2. С. 36—40.

решению задачи оптимизации. Получившуюся задачу выпуклой оптимизации решали с помощью метода условного градиента [5]. Описанная модель и численный метод до настоящего времени используются в подавляющем большинстве продуктов транспортного моделирования для описания блока равновесного распределения потоков по путям. Однако в работе [6] указано на ряд существенных недостатков модели Бэкмана и предложена альтернативная модель, которую авторы назвали моделью *стабильной динамики*.

При значительных изменениях графа транспортной сети необходимо включать дополнительный контур, связанный с тем, что изменения не только приведут к перераспределению потоков на путях, но и поменяют корреспонденции. Таким образом, корреспонденции также необходимо моделировать. Наибольшую популярность приобрела энтропийная модель расчета матрицы корреспонденций [7]. Здесь поиск данной матрицы сводился к решению задачи энтропийно-линейного программирования.

К сожалению, при этом в энтропийную модель явным образом входит информация о матрице затрат на кратчайших путях по всевозможным парам районов. Возникает порочный круг: чтобы посчитать эту матрицу, нужно сначала найти равновесное распределение потоков по путям, а чтобы найти последнее, необходимо знать матрицу корреспонденций, которая рассчитывается по матрице затрат. На практике отмеченную проблему решали методом простых итераций, которые повторялись до тех пор, пока не выполнялся критерий останова. К сожалению, до сих пор для описанной процедуры не известно никаких гарантий ее сходимости и тем более оценок скорости сходимости [8].

Таким образом, актуальным становится изучение современных многостадийных моделей и методов поиска в них стохастического равновесия. Предлагаемый магистерский курс математического моделирования и посвящен проблемам энтропийного моделирования, устойчивого равновесия и сходимости эволюционных математических моделей.

2. Содержание курса

***Тема 1. Теорема Тихонова. Принцип подчинения Хакена* [9, гл. 4; 10, § 6.4].** Системы с быстрыми и медленными движениями. Теорема А. Н. Тихонова (о разделении времен). Релаксационные колебания. Релаксационные колебания в системе ресурс-потребитель. Адиабатическое исключение быстрых переменных. Принцип подчинения Хакена. Абстрактная формулировка на языке операторов и проекций. Решение с использованием преобразования Лапласа. Поведение на малых временных масштабах. Граничные условия. Систематический анализ в рамках теории возмущений.

***Тема 2. Эргодическая теорема Биркгофа — фон Неймана — Хинчина* [11, л. 1; 12; 13].** Основные задачи эргодической теории. Свойство 1: существование инвариантной меры. Эргодическая теорема Биркгофа — Хинчина. Теорема Пуанкаре о возвращении. Парадокс Цермело. Свойство 2: эргодичность. Свойство 3: перемешивание. Свойство 4: центральная предельная теорема. Свойство 5: экспоненциальное убывание корреляций.

Тема 3. Асимптотические ряды (Пуанкаре) и методы малого параметра **[14, гл. 1, 2; 15, § 3.3, 3.4].** Пример вычисления интеграла. Асимптотические ряды: определение. Свойства асимптотических рядов. Метод малого параметра: задачи первого и второго типа. Регулярные и сингулярные возмущения.

Тема 4. Теория Колмогорова — Арнольда — Мозера **[16, гл. 18—21; 17].** Диофантовы частоты. Стандартные условия невырожденности. Теорема Колмогорова. Неавтономный вариант теоремы Колмогорова. Изоэнергетический вариант теоремы Колмогорова. Теория КАМ и проблема устойчивости в гамильтоновой динамике.

Тема 5. Групповой анализ **[18—20].** Однопараметрические группы преобразований. Группы, допускаемые дифференциальными уравнениями. Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих группу. Обыкновенные дифференциальные уравнения, обладающие фундаментальной системой решений. Фундаментальные решения уравнений математической физики как инвариантные решения. Группа Галуа.

Тема 6. Вариационные принципы **[21, гл. 10, 11].** Второй закон Ньютона. Конфигурационное и фазовое пространства. Деформация и вариация. Принцип Гамильтона. Уравнение Лагранжа II рода. Вырожденные лагранжианы. Тривиальные лагранжианы. Лагранжиан свободной частицы. Принцип относительности Галилея. Системы частиц. Обобщенный II закон Ньютона.

Тема 7. Принцип максимума Понтрягина. Принцип Беллмана **[22, ch. 4. 5; 23; 24, § 3.3].** Вариационное исчисление, динамика Гамильтона. Множители Лагранжа. Принцип максимума Понтрягина. Принцип максимума с граничными условиями. Принцип максимума с ограничениями. Вывод принципа Беллмана. Связь с принципом максимума Понтрягина.

Тема 8. Динамический хаос. Аттракторы. Фракталы **[25, гл. 1, 2, 11; 26; 27].** Историческое введение. Хаос в простых моделях динамических систем. Одномерные отображения. Двумерные отображения, сохраняющие площадь. Странные хаотические аттракторы. Геометрия странных аттракторов и фрактальная размерность. Фракталы. Фрактальная размерность — емкость. Размерность Хаусдорфа и ее связь с емкостью. Обобщенные размерности и мультифрактальный формализм.

Тема 9. Некорректные задачи, метод регуляризации Тихонова **[28, л. 15; 29].** Обратные задачи. Постановка задачи. Примеры. О природе некорректности. Пример. Решение методом Байеса. Сравнение с результатами из функционального анализа. Метод регуляризации Тихонова.

Тема 10. Обратные задачи. Солитоны **[30, гл. 4; 31].** Уравнение Кортевега — де Фриза (КдФ) и законы сохранения. Схема метода обратной задачи. Обоснование метода и ($L-A$)-пара Лакса. Солитонные решения. Понятие о солитонах. N-солитонные решения. Асимптотическое при $t \to \pm\infty$ поведение N-солитонного решения.

***Тема 11. Математические модели в биологии. Эволюционная оптимальность* [9, гл. 6, 7; 29].** Модель Вольтерра. Трофические функции в системе *хищник – жертва*. Периодические решения в системе *хищник – жертва*. Модель Колмогорова. Два конкурирующих вида. Принцип эволюционной оптимальности выживших видов.

***Тема 12. Теория бифуркаций* [32, гл. 1—9; 33].** Особенности, бифуркации и катастрофы. Теория особенностей Уитни. Применения теории Уитни. Машина катастроф. Бифуркации положений равновесия. Потеря устойчивости равновесных и автоколебательных режимов.

Список литературы

1. *Гасников А., Дорн Ю., Прохоров А., Швецов В.* Как бороться с пробками? // Троицкий вариант. 2012. № 117. С. 6—7.

2. *Введение* в математическое моделирование транспортных потоков / под ред. А. В. Гасникова. М., 2013.

3. *Beckmann M., McGuire C. B., Winsten C. B.* Studies in the economics of transportation. RM-1488. Santa Monica, 1955.

4. *Sandholm W.* Population games and Evolutionary dynamics. Economic Learning and Social Evolution. Cambridge, 2010.

5. *Frank M., Wolfe P.* An algorithm for quadratic programming // Naval research logistics quarterly. 1956. Vol. 3, N 1–2. P. 95–110.

6. *Nesterov Y., de Palma A.* Stationary Dynamic Solutions in Congested Transportation Networks: Summary and Perspectives // Networks Spatial Econ. 2003. N 3(3). P. 371—395.

7. *Вильсон А. Дж.* Энтропийные методы моделирования сложных систем. М., 1978.

8. *Ortúzar J.D., Willumsen L.G.* Modelling transport. JohnWilley & Sons, 2011.

9. *Разжевайкин В.Н.* Анализ моделей динамики популяций. М., 2010.

10. *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. М., 1986.

11. *Синай Я.Г.* Введение в эргодическую теорию. Ереван, 1973.

12. *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. М., 1999.

13. *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений. М., 2005.

14. *Ильин А.М., Данилин А.П.* Асимптотические методы в анализе. М., 2009.

15. *Мыскис А.Д.* Элементы теории математических моделей. М., 2007.

16. *Трещёв Д.В.* Гамильтонова механика // Лекц. курсы НОЦ. 2006. Вып. 4. С. 3—63.

17. *Treschev D., Zubelevich O.* Introduction to the perturbation theory of Hamiltonian systems. Springer, 2012.

18. *Ибрагимов Н.Х.* Азбука группового анализа. М., 1989.

19. *Ибрагимов Н.Х.* Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. Классические и новые методы. Нелинейные математические модели. Симметрия и принципы инвариантности. Н. Новгород, 2007.

20. *Гасников А. В.* Элементы дифференциальной геометрии и группового анализа. М., 2011.

21. *Юдович В. И.* Математические модели естествознания : курс лекций. Механика. М., 2009.

22. *Evans L. C.* An introduction to mathematical optimal control theory. After, 1983.

23. *Дмитрук А. В.* Об условиях оптимальности в задачах на экстремум с ограничениями. М., 2013.

24. *Крутов А. П., Петров А. А., Поспелов И. Г.* Математическая модель расширенного воспроизводства в централизованной плановой экономике с товарно-денежными отношениями. М., 1989.

25. *Кузнецов С. П.* Динамический хаос. М., 2006.

26. *Dimensions.* URL: http://www.dimensions-math.org/ (дата обращения: 17.02.2016).

27. *Chaos.* URL: http://www.chaos-math.org/ (дата обращения: 17.02.2016).

28. *Червоненкис А. Я.* Компьютерный анализ данных. М., 2009.

29. *Моделирование* транспортных потоков. URL: http://www.youtube.com/watch?v=jEHPUioVrgM (дата обращения: 20.02.2016).

30. *Габов С. А.* Введение в теорию нелинейных волн. М., 1988.

31. *Новокшенов В. Ю.* Введение в теорию солитонов. Ижевск, 2002.

32. *Арнольд В. И.* Теория катастроф. М., 1990.

33. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. М., 1980.

Об авторах

Сергей Валентинович Мациевский — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: matsievsky@newmail.ru

Александр Владимирович Гасников — канд. физ.-мат. наук, доц., Московский физико-технический институт, Долгопрудный; ведущий науч. сотр., Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича, Москва.

E-mail: gasnikov@yandex.ru

Ашот Артурович Гарибьянц — асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: shot_mc@mail.ru

About the authors

Dr Sergey Matsievsky — ass. prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: matsievsky@newmail.ru

Dr Alexander Gasnikov — ass. prof., Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudnyi, leading researcher, Institute for Information Transmission Problems, Moscow.

E-mail: gasnikov@yandex.ru

Ashot Garibyants — PhD student, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: shot_mc@mail.ru